Teorem 1) $P(x)$ noktasının $A(a)$ ile $B(b)$ noktaları arasında olması için gerek ve yeter şart $a<x<b$ veya $b<x<a$ olmasıdır.

İspat: $|AP| + |PB| = |AB| \iff a<x<b \vee b<x<a$

$|AP| + |PB| = |AB|$ olsun.

$a \neq b$, $a<b$ olsun. $x<a$ olsun.

$$\Rightarrow |AP| + |PB| = |AB|$$

$(x<a \text{ old})$ $|x-a| + |b-x| = |b-a|$

$$a - x + \cancel{b} - x = \cancel{b} - a$$

$$2a = 2x \Rightarrow a = x$$

Bu ise $x<a$ ile çelişir. Buradan $x \nless a$ dır.

$\Rightarrow a<x<b$ dir.

$x>b$ için yine çelişki bulunur. $(x=b)$ ($a<x$, $a<b$ olsun ve $x>b$ olsun.)

Benzer şekilde $b<a$ iken $b<x<a$ elde edilir.

$\Leftarrow$ $a<x<b$ ($\vee$ $b<x<a$) olsun. $a<x<b \Rightarrow x-a>0$

$b-x>0$

$b-a>0$

$|AP| + |PB| \overset{?}{=} |AB|$

$|AP|+|PB| = |x-a| + |b-x| = x-a + (b-x) = b-a = |AB|$

$\Rightarrow P(x)$ noktası $A(a)$ ve $B(b)$ noktaları arasındadır.

Benzer şekilde $b<x<a$ alındığında da $P(x)$ noktasının $A(a)$ ve $B(b)$ noktaları arasında olduğu görülebilir.

Teorem 2: Bir doğruya ait farklı üç noktadan yalnız biri diğer ikisinin arasındadır.

İspat: $A(a)$, $B(b)$ ve $C(c)$ aynı doğruya ait farklı üç nokta olsun.

$a<b<c \vee c<b<a$ olabilir. $\Rightarrow$ B noktası A ile C arasındadır

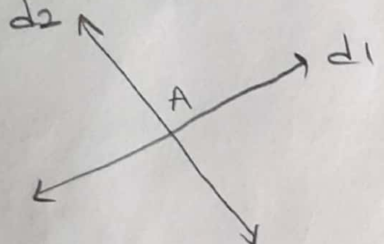
$b<a<c \vee c<a<b$ olabilir $\Rightarrow$ A noktası B ile C ″

$a<c<b \vee b<c<a$ ″ $\Rightarrow$ C ″ A ile B ″

Teorem: Farklı iki doğru en çok bir noktada kesişir.

İspat: Hipotez; d_1, d_2 farklı iki doğru

Hüküm; $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ ise A birtektir.

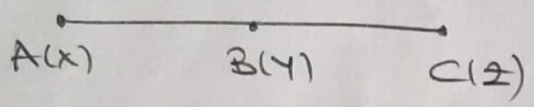


Bir an için A dan başka bir noktada da B olsun. Budurumda $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ ve $d_1 \cap d_2 = \{B\}$ yazılır. Bu taktirde,

$A \in d_1$, $A \in d_2$
$B \in d_1$, $B \in d_2$ olur.

Buda farklı iki noktadan geçen birtek doğru vardır aksiyomu gereğince d_1 ve d_2 nin aynı doğru olduğunu gösterir. O halde A birtektir.
(hipotezde d_1 ve d_2 farklı iki doğru olarak alındığından)

Teorem (Arada olma): Bir doğru üzerinde 3 farklı nokta $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ ve $x<y<z$ olsun.
$|AB|+|BC|=|AC|$ ise B, A ile C arasındadır.



$$|AB|=|x-y|=-x+y$$
$$|BC|=|y-z|=-y+z$$
$$|AC|=|x-z|=-x+z$$
$$|AB|+|BC|=|AC|$$
$$-x+y-y+z=-x+z$$

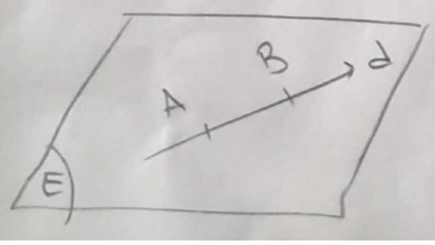
Nokta, Doğru ve Düzlem Arasındaki İlişkiler

Aksiyom 2: Herhangi üç noktadan en az bir düzlem geçer.

Aksiyom 3: Doğrusal olmayan 3 noktadan bir tek düzlem geçer.

Aksiyom 4: Bir düzlemin doğrusal olmayan en az 3, uzayın ise düzlemsel olmayan en az 4 noktası vardır.

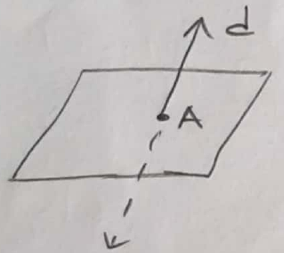
Aksiyom 5: Bir doğrunun farklı iki noktası bir düzlemin içinde ise doğruda o düzlemin içinde kalır.



Teorem: Bir doğru, içinde bulunmadığı düzlemi keserse arakesit bir tek noktadır.

İspat: Hipotez: d bir doğru, E bir düzlem
d, E nin dışında

Hüküm: $d \cap E = \{A\}$ ise A bir tektir.



$d \cap E = \{A\}$, $d \cap E = \{B\}$

Bir an için doğrunun düzlemi A dan başka B noktasındada kestiğini düşünelim. Bu taktirde

$d \cap E = \{A\}$ $\quad$ $d \cap E = \{B\}$

$A \in d$ $\quad$ $A \in E$

$B \in d$ $\quad$ $B \in E$

yazılabilir. Bu ise aksiyom 5 gereğince d nin içinde olduğunu gösterir. Bu hipotezle çelişir. Yani A bir tektir.

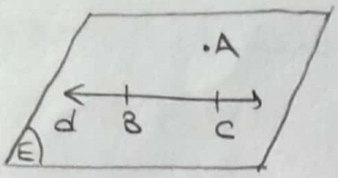
Teorem: Bir doğru ile dışındaki bir noktadan bir tek düzlem geçer.

İspat:

Hipotez: d bir doğru ve A d'nin dışında bir nokta

Hüküm: d ile A bir düzlem belirtir.

Scanned by CamScanner



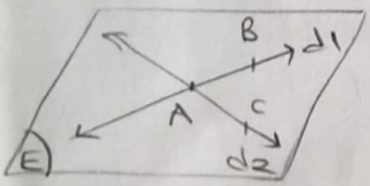
d doğrusunun farklı 2 noktası
B ve C olsun. Bu taktirde

aksiyom 3 : doğrusal olmayan 3 nokta bir tek düzlem
oluşturur.

Teorem: Kesişen farklı iki doğrudan bir tek düzlem geçer.

İspat: **Hipotez:** d_1 ve d_2 farklı iki doğru, $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ olsun.

Hüküm: d_1 ve d_2 bir düzlem belirtir.

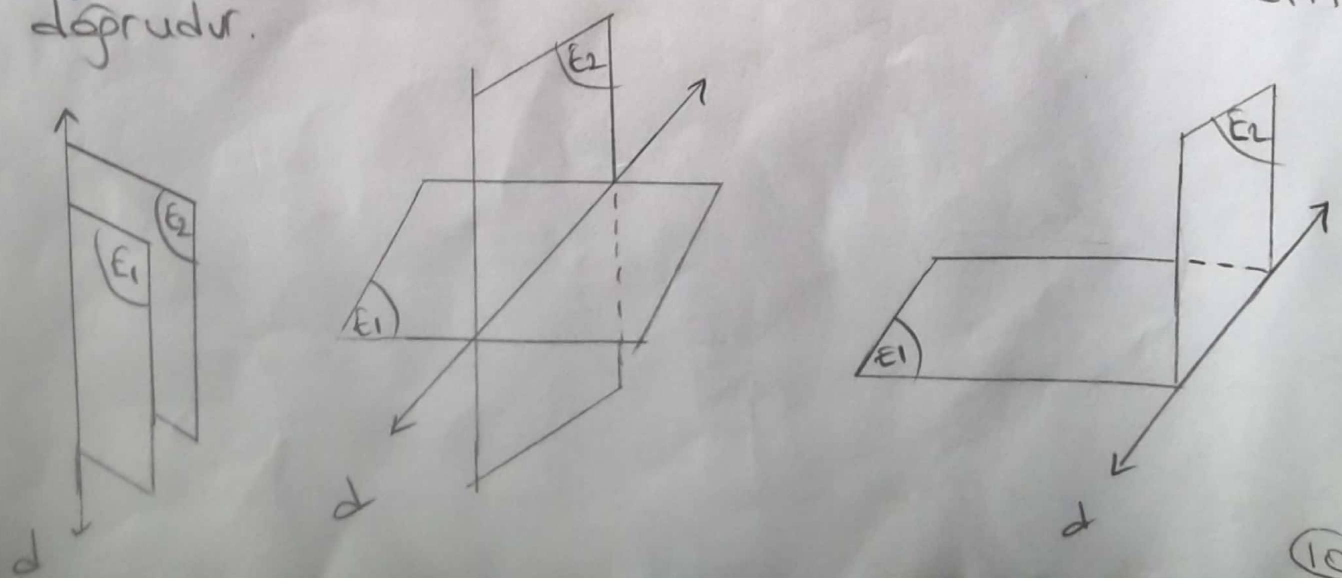


d_1'in A nın dışında bir B noktası,

d_2'nin A nın dışında bir C noktası vardır.

Bu durumda doğrusal olmayan A, B, C noktası oluştu. Bunlarda bir tek düzlem belirtir. (d_1 ile C noktası, d_2 ile B noktası bir düzlem belirtir.)

Aksiyom 6: Kesişen farklı iki düzlemin arakesiti bir doğrudur.

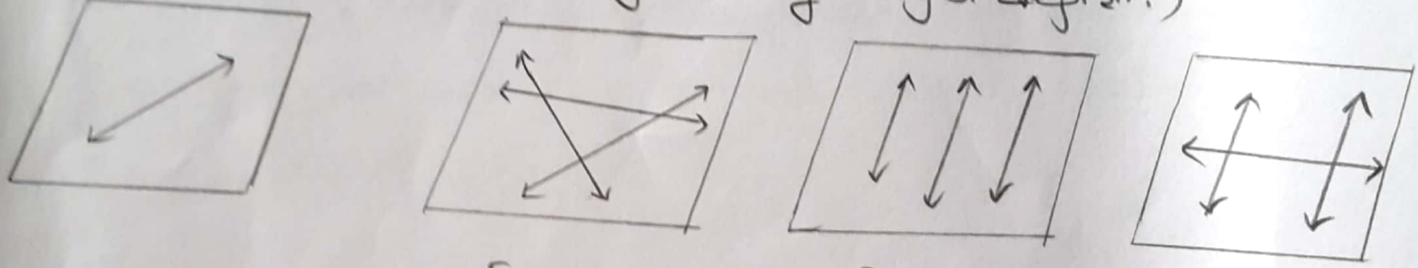


Aksiyon 7: (Düzlem ayırma Aksiyomu): Düzlemin içinde bulunan n tane farklı doğru düzlemi

En az $(n+1)$ tane

En çok $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ tane bölgeye ayırır.

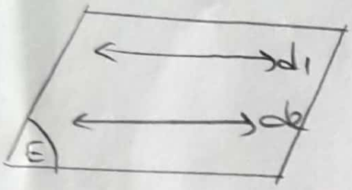
(Çizime göre bölge sayısı değişir.)



En çok   En az

Paralel Doğrular

Aynı düzlemde bulunan ve kesişmeyen doğrulardır.

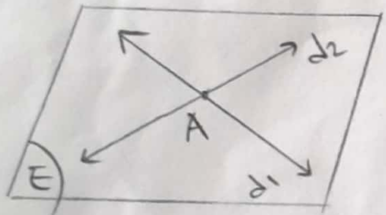


$d_1 \cap d_2 = \emptyset$ ise $d_1 \parallel d_2$

$d_1 \subset E$, $d_2 \subset E$

Kesişen Doğrular

Aynı düzlemde bulunan ve bir tek ortak noktaları olan doğrulardır.



$d_1 \subset E$, $d_2 \subset E$

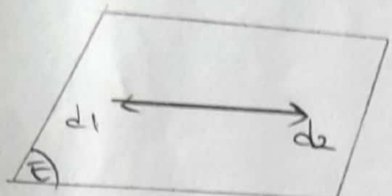
$d_1 \cap d_2 = \{A\}$

Aykırı Doğrular

Farklı düzlemlerde bulunan ve kesişmeyen doğrulardır.

$d_1 \subset E$, $d_2 \not\subset E$ ve $d_1 \cap d_2 = \emptyset$

Çakışan Doğrular



$d_1 \subset E$, $d_2 \subset E$ $\Big\}$ $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$ ise

d_1 ile d_2 çakışan doğrudur.

Aksiyom 8: (Paralellik Aksiyonu): Bir doğruya dışındaki bir noktadan en çok bir paralel doğru çizilebilir.